Departamento de Análisis Matemático

Licenciatura en Matemáticas. Cálculo. Septiembre 2002

Ejercicio 1. (a) Calcular:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen} a + 4\operatorname{sen}(a/2) + 9\operatorname{sen}(a/3) + \cdots + n^2 \operatorname{sen}(a/n)}{n^2}$$

(b) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{n!}$, donde $a > -1$.

(c) Estudiar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3}(\log n)^2}$.

Ejercicio 2. El principio de Fermat afirma que la luz viaja de un punto A a otro punto B siguiendo la trayectoria en la que se invierte el menor tiempo posible. Supongamos que el eje de abscisas, $y=0$, separa dos medios en los que la luz viaja a distinta velocidad (por ejemplo, aire y agua). Sea c la velocidad de la luz en el semiplano superior $y>0$ y sea $\frac{3}{4}c$ la velocidad correspondiente al semiplano inferior $y<0$. Calcular el punto de dicho eje por el que pasará el rayo que viaje desde el punto $A=(-4,3)$ al $B=(3,-4)$.

Ejercicio 3. (a) Sabiendo que g es una función continua con $g(0)=3$, justificar que

$$\int_{x^2-1}^{xy} g(t)\,dt \ + \ x^2 y = 0$$

define a y como función implícita de x en un entorno del punto $(1,0)$. Calcular $y'(1)$.

(b) Sea la función $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = x^2 + (1-x)^3 y^2 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

Probar que tiene un único punto crítico que es un extremo relativo pero no absoluto.

Ejercicio 4. (a) Calcular el volumen del conjunto

$$\Omega = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} \leqslant 1,\ x^2+y^2 \geqslant 4 \right\}$$

(b) Calcular $\displaystyle\int_A \log(1+x^2+4y^2)\, d(x,y)$, donde $A = \{(x,y) \ : \ 4 \leqslant x^2+4y^2 \leqslant 16\}$.

Ejercicio 5. Hallar la ecuación de la familia de curvas para las cuales la longitud del segmento de tangente comprendido entre el punto de tangencia (x,y) y el eje OY es igual a la longitud del segmento del eje OY interceptado por dicha tangente y el origen.

Granada, 11 de septiembre de 2002